NOTICE

SUR LES

TRAVAUX SCIENTIFIQUES

DE

M. O. CALLANDREAU,

ASTRONOME ADJOINT A L'OBSERVATOIRE DE PARIS,
RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1892

TITRES DIVERS.

Élève à l'École Polytechnique (1872-1874).

Docteur ès sciences (1880).

Présenté à M. le Ministre de l'Instruction publique, pour une place d'astronome titulaire, vacante à l'Observatoire de Paris par le décès de M. Yvon Villarceau (1884).

Obtient une part du prix Lalande (1884).

Porté sur la liste des candidats pour une place vacante au Bureau des Longitudes (1886).

Répétiteur de Mécanique (1886), puis d'Astronomie (1888) à l'École Polytechnique.

Collaborateur, avec MM. Bigourdan et Radau, du *Bulletin astronomique*, créé en 1884, et publié sous les auspices de l'Observatoire, par M. F. Tisserand.

Obtient un prix dans le concours du prix Damoiseau (1891).

RÉSUMÉ ANALYTIQUE

ET PAR ORDRE DE MATIÈRES.

Dans les analyses qui se trouvent plus loin, l'ordre de publication a été suivi. Il paraît utile de présenter un tableau résumé des résultats obtenus.

Observations. Astronomie pratique.

Observations méridiennes au nombre de 30000 environ. 630 observations de petites planètes et de 4 comètes.

Observation du passage de Vénus sur le Soleil, en 1882, à l'île de Haïti (septembre 1882-février 1883).

Examen d'un cercle à niveau de mercure ayant pour but de retrouver à bord des navires la direction de la verticale quand l'horizon de la mer ne peut être observé (21).

Astronomie sphérique.

Tables pour faciliter le calcul des éphémérides des petites planètes (22).

Prédiction des occultations au moyen de constructions graphiques et de diagrammes (29).

Calcul d'orbites et d'éphémérides.

Éléments et éphéméride de la planète (217) Eudore, découverte par M. Coggia (11).

Contribution à la théorie du mouvement elliptique et parabolique (13).

Calcul des perturbations par quadratures. Autres méthodes spéciales de calcul.

Détermination, d'après les méthodes de M. Gyldén, des perturbations de la petite planète (103) Héra, par Jupiter, Saturne et Mars, pendant cinq oppositions (10).

Calcul des variations séculaires des éléments des orbites, par la méthode de Gauss, avec des Tables numériques utilisables pour tous les cas (16, 26). Application à la planète (103) Héra, en tenant compte des actions de Jupiter, Saturne et Mars (16).

Introduction des fonctions elliptiques dans les développements pour augmenter leur convergence. Essais numériques concernant les méthodes proposées par Jacobi et par M. Gyldén (8, 12).

Calcul des perturbations pour une ou deux séries d'époques équidistantes, en profitant des simplifications qui se présentent pour des valeurs *définies* du temps (24).

Valeur asymptotique de certains coefficients utilisés dans les quadratures mécaniques (33).

Perturbations des planètes.

Étude comparative des méthodes de Laplace et de Hansen (3).

Recherches sur les coefficients $b_s^{(n)}$ de Laplace dépendant du rapport $\frac{a}{a'} = \alpha$ des grands axes des planètes prises deux à deux. Calcul des coefficients par une méthode spéciale quand $s = \frac{1}{2}$ (1). Évaluation des dérivées d'ordre très élevé des coefficients $b_s^{(n)}$ par rapport à α. Compléments à la méthode donnée par Le Verrier dans le t. II des *Annales de l'Observatoire de Paris* (9).

Démonstration simple du résultat dû à Laplace concernant la limite de convergence des séries du mouvement elliptique (25).

Remarques sur le calcul des transcendantes de Bessel $J_i(x)$. Leur évaluation, quand x a de grandes valeurs, au moyen de séries semi-convergentes (31).

Problèmes se rapportant au développement de la fonction perturbatrice quand l'inclinaison a une valeur considérable (15, 19).

Calcul des inégalités d'ordre élevé. Compléments aux méthodes imaginées par Cauchy (40).

Figure des planètes.

Sur les calculs de Maxwell, relatifs au mouvement d'un anneau rigide autour de Saturne (30). Complément aux conclusions de Maxwell.

Développement de la théorie de Clairaut, en tenant compte, dans les approximations, des termes de l'ordre du carré de l'aplatissement, afin d'embrasser dans les recherches toutes les planètes, y compris celles qui ont, comme Saturne, un aplatissement très sensible (27).

Simplifications qu'introduit l'hypothèse d'une diminution rapide de la compressibilité à mesure qu'on s'éloigne de la surface (27).

Écart entre la figure d'équilibre et l'ellipsoïde de révolution ayant mêmes axes (27).

Évaluation de l'énergie potentielle de la gravitation d'une planète (27).

Limite de la densité superficielle d'une planète (27).

Sur quelques propriétés des polynômes de Legendre et des fonctions sphériques (20).

Calcul des polynômes X_n de Legendre pour les grandes valeurs de n, au moyen d'une série due à M. Darboux (37). Examen du reste.

Développement en série du potentiel des sphéroïdes. Compléments à un Mémoire de Poisson inséré dans la *Connaissance des Temps* pour 1829 (28).

Développement en série de l'énergie potentielle de deux ellipsoïdes qui s'attirent (23).

Mouvement de rotation des corps célestes.

Réduction à la forme canonique des équations différentielles pour la variation des arbitraires. Extension aux équations du mouvement de rotation de la méthode suivie par Delaunay pour intégrer, sous forme littérale, les équations du mouvement de la Lune (35).

Mouvement de la Lune et des satellites.

Représentation géométrique simple des variations des éléments des orbites (32).

Étude d'une classe d'équations différentielles du second ordre qui jouent un rôle important dans les recherches récentes de MM. Gyldén et Lindstedt d'une part, Adams et Hill d'autre part (18).

Étude sur quelques applications des théories concernant les solutions particulières périodiques du problème des trois corps et l'intégration des équations différentielles linéaires à coefficients périodiques. Rapprochement avec les travaux antérieurs d'Euler et de Lagrange (36).

Comètes périodiques et étoiles filantes.

Étude des grandes perturbations des comètes lorsqu'elles passent très près des grosses planètes. Comparaison avec les particularités qu'offrent les éléments des comètes périodiques connues. Justification de la théorie de la *capture* des comètes. Examen des difficultés provenant de la rareté des approches bien accentuées des comètes et des planètes, et de l'absence des comètes hyperboliques (34).

Extension aux étoiles filantes des recherches sur les comètes périodiques. Conséquence du *criterium* de M. Tisserand. Loi du déplacement des points radiants appartenant à une même famille. Application aux Perséides (38).

NOTICE

SUR LES

TRAVAUX SCIENTIFIQUES

DE

M. O. CALLANDREAU,

Astronome adjoint à l'Observatoire de Paris,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

1. Note sur l'emploi des fractions continues algébriques pour le calcul des coefficients $b_s^{(i)}$ de Laplace.

Journal de l'École Polytechnique, XLVe Cahier; 13 pages.

M. Hermite avait montré dans son Cours à la Sorbonne, en 1875, comment les fractions continues algébriques peuvent donner facilement un résultat de Jacobi touchant l'évaluation approchée de l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}$, et aussi la célèbre méthode d'intégration de Gauss; je me suis proposé de faire une application des principes indiqués par l'illustre géomètre aux coefficients $b_s^{(i)}$ de Laplace définis par l'égalité

$$(1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos\lambda)^{-s} = \tfrac{1}{2} b_s^{(0)} + b_s^{(1)} \cos\lambda + b_s^{(2)} \cos 2\lambda + \ldots + b_s^{(i)} \cos i\lambda + \ldots.$$

J'arrive en particulier à un procédé de calcul fort simple pour $b_{\frac{1}{2}}^{(i)}$:

$$\tfrac{1}{2} b_{\frac{1}{2}}^{(i)} = \frac{1}{n} \sum \frac{p^i \alpha^i}{\sqrt{1 - p\alpha^2}}, \qquad \text{avec} \qquad p = \cos^2\frac{\theta}{2} \qquad \text{et} \qquad \cos n\theta = 0.$$

Cette formule est appliquée au calcul des dix premiers coefficients qui

interviennent dans la recherche des perturbations de Mercure par Vénus.

J'ai pu assigner une limite supérieure de l'erreur commise en faisant usage d'un résultat compris dans le Mémoire de Gauss *Sur la série hypergéométrique*.

2. Sur nne méthode de transformation des intégrales dépendant de racines carrées. Application à un problème fondamental de Géodésie.

Comptes rendus, t. LXXXV, p. 664 et 1062.

La transformation dont il s'agit consiste à substituer au radical une somme de fractions rationnelles : la valeur numérique absolue de la quantité X étant supposée inférieure à l'unité, on peut écrire, avec le degré de précision que l'on désire,

$$\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2-2\alpha X}} = \frac{1}{n}\sum \frac{1-p^2\alpha^2}{\sqrt{1-p\alpha^2}}\,\frac{1}{1+p^2\alpha^2-2p\alpha X},$$

en prenant

$$p=\cos^2\frac{\theta}{2} \qquad \text{et} \qquad \cos n\theta = 0;$$

il suffit de donner à n une valeur assez grande.

Quand on cherche pour l'extrémité d'une ligne géodésique la latitude et l'azimut, connaissant ces deux éléments pour le point de départ et la longueur de l'arc, la quantité α est très petite, et il suffit presque de prendre $n=1$.

3. Sur les rapports qui existent entre les méthodes de Hansen et de Laplace pour le calcul des perturbations.

Note présentée à l'Académie royale des Sciences de Stockholm, le 9 octobre 1878; 9 pages.

Dans cette Note, on rapproche la méthode de Hansen des principes exposés dans l'article 47, Livre II de la *Mécanique céleste*, sur les per-

turbations du rayon vecteur et de la longitude. Dans la dernière Partie du travail, on cherche la relation que doivent vérifier les éléments variables d'une orbite auxiliaire mobile pour que l'orbite réelle puisse correspondre à la première point par point, comme il arrive dans la méthode de Hansen; on obtient, comme cas particulier, les résultats de l'illustre astronome.

4. Sur la formule de quadrature de Gauss.

Comptes rendus, t. LXXXIV, p. 1225, et t. XC, p. 1067.

La méthode de Gauss, pour l'évaluation approchée des intégrales, est naturellement d'une grande utilité dans les applications; mais, comme il arrive souvent dans cet ordre de questions, il est difficile d'avoir des renseignements sur l'approximation obtenue.

En partant de résultats qui appartiennent à M. Hermite (Cours professé à la Sorbonne en 1875), j'ai montré dans la première Note que la formule de Gauss pouvait être rattachée à la théorie générale des fonctions, ce qui conduit à une expression remarquable du reste. Dans la seconde Note, où il n'est plus question que des quantités réelles, je fais voir qu'on peut souvent se prononcer sur le sens de l'erreur commise, parfois même en obtenir une expression approchée. En particulier, pour la formule de Gauss, si l'on suppose que la fonction $f(x)$, placée sous le signe d'intégration, est développable en série convergente

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{2n} x^{2n} + \ldots;$$

que tous les termes, à partir de a_{2n} par exemple, gardent le même signe, on aura, pour les grandes valeurs de n,

$$a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \ldots = x \sum_{i=1}^{i=n} P_i f(p_i x) + 2\pi a_{2n} \left(\frac{y}{\omega}\right)^{2n+1};$$

on a posé

$$\frac{4y}{(1+y)^2} = \omega x = \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} x.$$

5. Sur la formule sommatoire de Maclaurin.

Comptes rendus, t. LXXXVI, p. 589.

La formule sommatoire intervient dans des applications importantes. Je la rattache à la formule d'intégration par parties, et je simplifie notablement l'analyse employée dans un beau Mémoire de M. Malmsten (*Journal de Crelle*, t. XXXVI).

6. Traduction, suivie de Notes, d'un Mémoire de M. Gyldén sur la sommation des fonctions périodiques.

Annales de l'École Normale supérieure, 1879; 35 pages.

La traduction est augmentée de plusieurs Notes, destinées à préciser et à étendre quelques-uns des points abordés dans son travail par l'éminent astronome.

Dans ce Mémoire, M. Gyldén retrouve des résultats obtenus antérieurement par lui : je veux parler de nouveaux développements trigonométriques pour l'arc θ, $\cos x\theta$ et $\sin x\theta$, entre les limites $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ de la variable θ. Dans le n° 1645 des *Astronomische Nachrichten*, M. Gyldén avait indiqué l'usage de ces formules pour transformer des séries trigonométriques dépendant de deux arguments variables dont le rapport est constant, en séries trigonométriques dépendant toujours de deux arguments, mais dont l'un seulement est variable, tandis que l'autre demeure constant entre des limites étendues. Les mêmes principes ont été appliqués depuis au calcul des perturbations relatives des petites planètes (*cf.* n° 10).

7. Sur une intégrale définie.

Comptes rendus, t. XCIX, p. 90.

Je trouve que l'intégrale

$$\int_0^1 \left(A + \frac{B}{x} + \frac{C}{1-x}\right) x^{\frac{\gamma+\gamma'}{2}-1} (1-x)^{\frac{\alpha+\alpha'}{2}+\frac{\beta+\beta'}{2}-\frac{\gamma+\gamma'}{2}} F(\alpha, \beta, \gamma) F(\alpha' \beta' \gamma')\, dx,$$

où F dénote la série hypergéométrique, et A, B, C ont les valeurs

$$A=\left(\frac{\alpha+\alpha'}{2}-\frac{\beta+\beta'}{2}\right)\left(\frac{\beta-\beta'}{2}-\frac{\alpha-\alpha'}{2}\right),$$

$$B=\frac{\gamma-\gamma'}{2}\left(\frac{\gamma+\gamma'}{2}-1\right),$$

$$C=\left(\frac{\gamma-\gamma'}{2}-\frac{\alpha+\alpha'}{2}-\frac{\beta-\beta'}{2}\right)\left(\frac{\gamma+\gamma'}{2}-\frac{\alpha+\alpha'}{2}-\frac{\beta+\beta'}{2}\right),$$

est réductible aux fonctions Γ toutes les fois qu'elle a un sens.

Ce résultat comprend, en particulier, des formules remarquables, données par M. Appell.

8. Sur le choix de la fonction du temps qui doit figurer, sous les signes sinus et cosinus, dans les expressions des perturbations.

Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft, 1879; 6 pages.

On sait que les expressions des perturbations sont mises sous la forme de séries trigonométriques, telles que

$$\Sigma A \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (i - i'\nu)x,$$

i et i' étant deux entiers, ν un nombre incommensurable et x l'argument fonction du temps; suivant la *Mécanique céleste*, x désigne l'anomalie moyenne de la planète troublée, tandis qu'il est fait usage de l'anomalie excentrique dans la méthode de Hansen.

L'étude des beaux travaux de M. Gyldén m'a engagé à prendre comme argument une nouvelle variable, dont l'introduction est toute naturelle, quand on envisage l'expression de la distance mutuelle des deux corps

$$\Delta=\sqrt{A+B\cos g'+C\sin g'},$$

où A, B et C sont des fonctions trigonométriques de l'anomalie excentrique de la planète troublée, et où g' désigne l'anomalie moyenne de

la planète troublante, la quantité sous le radical étant mise sous la forme

$$\text{coefficient} \times [1 + \Phi \cos(\varepsilon - \mu\varepsilon + A)], \qquad \mu = \frac{n'}{n};$$

on observe, en effet, que l'angle A varie dans des limites rapprochées et que le nombre Φ, assujetti pareillement à de faibles variations, ne s'éloigne pas beaucoup de l'unité; on est donc amené à poser

$$(1-\mu)\varepsilon + \text{angle constant} = 2\,\text{am}\,\frac{2K}{\pi}\,x \qquad (\text{mod. } k),$$

et à prendre comme argument la variable x.

J'ai fait une application numérique de ces principes à la planète Égérie pour avoir une idée de la convergence des nouveaux développements.

M. A. Donner a construit des Tables pour le calcul, sous la forme mentionnée, des perturbations absolues produites par Jupiter dans les mouvements des petites planètes (Stockholm, 1881).

9. Sur des transcendantes qui jouent un rôle important dans la théorie des perturbations planétaires.

Comptes rendus, t. XC, p. 1154, 1201 et 1540.

Quand on applique la formule de Taylor pour tenir compte des excentricités dans le développement de la fonction perturbatrice, on est amené à considérer des termes de la forme

$$\frac{\alpha^n}{1.2\ldots n}\,\frac{d^n b_s^{(m)}}{d\alpha^n},$$

$b_s^{(m)}$ ayant la signification qui résulte de l'égalité

$$(1+\alpha^2-2\alpha\cos\lambda)^{-s} = \tfrac{1}{2}b_s^{(0)} + b_s^{(1)}\cos\lambda + \ldots + b_s^{(m)}\cos m\lambda + \ldots.$$

Un beau théorème, dû à M. Tisserand, m'a conduit à chercher la valeur de l'expression ci-dessus quand n est un grand nombre.

Une analyse fort simple conduit au résultat : en particulier, quand $s = \frac{1}{2}$, on a, pour n très grand,

$$\frac{x^n}{1.2\ldots n}\frac{d^n b_{\frac{1}{2}}^{(m)}}{d\alpha^n} = \frac{2}{\pi n}\left(\frac{x}{1-\alpha}\right)^n,$$

formule dont l'utilité pratique est confirmée par quelques nombres empruntés aux théories des planètes. Depuis, M. Darboux a montré que les principes contenus dans son beau Mémoire *Sur l'approximation des fonctions de grands nombres* (*Journal de Mathématiques*, 1878) permettaient d'obtenir ces transcendantes avec une approximation indéfinie.

Dans la troisième Note, je m'occupe de la méthode donnée par Le Verrier (*Annales de l'Observatoire de Paris*, t. II) pour calculer les quantités $\alpha^n \frac{d^n b_s^{(m)}}{d\alpha^n}$, laquelle revient à transformer la série

$$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots$$

dans la nouvelle série

$$f(x) = \frac{A_0}{1-x} + \delta A_0 \frac{x}{(1-x)^2} + \delta^2 A_0 \frac{x^2}{(1-x)^3} + \ldots + \delta^{i-1} A_0 \frac{x^{i-1}}{(1-x)^i}$$
$$+ \frac{x^i}{(1-x)^i}(\delta^i A_0 + \delta^i A_1 x + \delta^i A_2 x^2 + \ldots,$$

la caractéristique δ^i indiquant la différence d'ordre i. La conclusion est que la série transformée convergera comme la série qui donne $b_{\frac{1}{2}}^{(0)}$, si l'ordre i des différences est augmenté d'une unité pour chaque dérivation, et de deux unités quand on passe de l'une des valeurs $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$ de s à la valeur suivante.

Il n'est peut-être pas inutile de rappeler que Le Verrier a recalculé avec plus d'étendue les nombres parfois erronés de la *Mécanique céleste*, et que cependant, par la suite, Delaunay montra (*Comptes rendus*, t. LI) que quelques-uns des derniers chiffres des derniers nombres de Le Verrier s'écartaient de la vérité; cela explique l'importance des méthodes de calcul pour les transcendantes dont il s'agit.

10. Détermination des perturbations d'une petite planète par les méthodes de M. Gyldén. Application à (103) Héra.

Comptes rendus, t. LXXXVII, p. 1071; t. LXXXVIII, p. 960; t. XC, p. 82 et 517; t. XCIII, p. 134 et 201. — Annales de l'Observatoire de Paris, t. XVI; 54 pages.

La méthode imaginée par M. Gyldén, en 1874, repose sur l'emploi de nouvelles expressions trigonométriques.

On connaissait les formules

$$\tfrac{1}{2}\varepsilon = \sin\varepsilon - \tfrac{1}{2}\sin 2\varepsilon + \tfrac{1}{3}\sin 3\varepsilon, \quad \ldots, \quad -\pi < \varepsilon < \pi$$

et

$$\tfrac{1}{4}\varepsilon = \frac{2}{\pi}\left(\sin\varepsilon + \frac{1}{3^2}\sin 3\varepsilon + \frac{1}{5^2}\sin 5\varepsilon + \ldots\right), \quad -\frac{\pi}{2} < \varepsilon < \frac{\pi}{2};$$

M. Gyldén en a trouvé une infinité d'autres, beaucoup plus convergentes, pour exprimer l'arc entre des limites distantes de π. En partant de là, il n'est pas difficile de représenter les perturbations par des séries *simples* dans des intervalles successifs, l'anomalie excentrique, si c'est l'argument adopté, variant par exemple de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$, de $\frac{\pi}{2}$ à $\frac{3\pi}{2}$, ... La méthode de M. Gyldén a été appliquée d'abord par M. O. Backlund, en 1874, à la planète (112), Iphigénie. J'ai pensé, de mon côté, que cette méthode offrait des avantages, et je m'en suis servi à diverses reprises, en ajoutant quelques modifications et en profitant de nouvelles remarques de M. Gyldén.

Le Mémoire inséré dans les *Annales de l'Observatoire* résume les recherches; les perturbations ont été calculées pour cinq oppositions, et les éphémérides publiées ont montré un bon accord avec les observations.

Je crois utile d'ajouter que deux autres applications de la même méthode de M. Gyldén ont été faites depuis : à la planète Diana par M. Dubjago, et à la planète Coronis par M. Schdanov, tous deux de l'Observatoire de Poulkova.

Le travail dont je parle a été présenté, en 1880, à la Faculté des Sciences de Paris, pour obtenir le grade de docteur ès Sciences mathématiques.

11. Éléments et éphémérides de la planète (217), Eudore, découverte par M. Coggia.

Comptes rendus, t. XCI, p. 717; t. XCIII, p. 831 et 1059.

Calcul des éléments provisoires de l'orbite et d'une éphéméride, à laquelle les observations ont été comparées après une nouvelle détermination des étoiles de comparaison. Un nouveau système d'éléments ayant été obtenu, on a construit une éphéméride étendue pour la recherche de l'astre. Par malheur, l'opposition avait lieu au mois de décembre, dans une période très défavorable, et la planète, diminuant de plus en plus d'éclat depuis la découverte, près du périhélie, atteignait la 14e grandeur; elle n'a pu être retrouvée qu'en 1885.

Il est intéressant de comparer les éléments provisoires (I), les éléments (II) obtenus après la réobservation des étoiles de comparaison et les éléments adoptés dans l'*Annuaire du Bureau des Longitudes :*

Éléments.	ω.	ϖ.	i.	φ.	μ.	Équinoxe.
I......	164°. 7'.19"	307°. 9'.58"	11°. 6'.25"	19°.55'.25"	665",765	1880,0
II......	164. 0.31	314.54.17	10.16. 2	17.51.33	727,537	1880,0
III.....	164.10.28	314.41.11	10.18.52	17.52. 3	730,164	1890,0

Ces nombres prouvent qu'il était nécessaire de recalculer les éléments provisoires; on voit aussi que les éléments II ne s'éloignent pas par trop des éléments plus récents.

12. Contribution à l'application des fonctions elliptiques à l'Astronomie.

Astronomische Nachrichten, n° 2389.

J'avais fait un essai numérique relatif (n° 8) à l'introduction d'une nouvelle variable dans les expressions des perturbations

$$\Sigma A \frac{\cos}{\sin}(i - i'\nu)x,$$

en adoptant pour x la variable définie par l'égalité

$$(1-\mu)\varepsilon + \text{angle constant} = 2\,\text{am}\,\frac{2K}{\pi}x\,(\text{mod.}\,k).$$

Dans ce nouvel essai numérique, je laisse subsister dans les développements les deux variables ε et x. La présence des deux arguments n'est pas un obstacle à l'intégration, et les nombres obtenus témoignent en faveur de la convergence ; l'intégration est effectuée au moyen d'un algorithme spécial.

Il ne me paraît pas sans intérêt de faire remarquer que Jacobi a fait choix précisément des mêmes variables (ε et x) dans son travail posthume publié par M. Scheibner : *Ueber einige Jacobi's Arbeiten auf dem Gebiete der Störungstheorie* (*Astronomische Nachrichten*, n° 2444) ; mais il ne s'était pas occupé de l'intégration.

13. Contribution à la théorie du mouvement elliptique et parabolique.

Journal de l'École Polytechnique, XLIXe Cahier ; 8 pages.

Il s'agit, dans cette Note, du développement de l'accroissement de l'anomalie excentrique $u - u_0$, ou de l'anomalie vraie $v - v_0$ (dans le cas d'une orbite parabolique), suivant les puissances de l'accroissement du temps $t - t_0$; on cherche entre quelles limites les développements demeurent convergents.

La théorie de la détermination des orbites des planètes et des comètes met à profit les développements dont il s'agit.

M. Serret avait été déjà conduit à étudier cette question dans son Mémoire *Sur l'équation de Képler* (*Annales de l'Observatoire*, t. V).

14. Sur la théorie du mouvement des corps célestes.

Comptes rendus, t. XCIII, p. 779.

Démonstration nouvelle de formules dues à M. Gyldén et qui servent à trouver l'*évection* et la *variation*.

15. Calcul d'une intégrale double.

Comptes rendus, t. XCVI, p. 1125.

Il s'agit de l'intégrale double

$$\frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos ix \cos jy \, dx \, dy}{\sqrt{1+\alpha^2-2\alpha(\mu\cos x+\nu\cos y)}},$$

considérée par M. Tisserand dans son *Mémoire sur le développement de la fonction perturbatrice dans le cas où l'inclinaison mutuelle des orbites est considérable.* (*Annales de l'Observatoire de Paris*, t. XV.)

Je remplace l'inverse du radical par une somme de termes rationnels, en faisant usage (n° 2) de la formule

$$\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2-2\alpha\cos V}} = \frac{1}{n}\sum \frac{1}{\sqrt{1-p\alpha^2}}\,\frac{1-p^2\alpha^2}{1+p^2\alpha^2-2p\alpha\cos V},$$

puis je me sers, pour achever l'intégration, d'une formule approchée qui donne la valeur du coefficient $B_{\frac{1}{2}}^{(k)}$ dans le développement

$$\begin{aligned}&[(1+a^2-2a\cos x)(1+b^2-2b\cos x)]^{-\frac{1}{2}}\\ &= B_{\frac{1}{2}}^{(0)} + B_{\frac{1}{2}}^{(1)}\cos x + B_{\frac{1}{2}}^{(2)}\cos 2x + \ldots + B_{\frac{1}{2}}^{(k)}\cos kx + \ldots,\end{aligned}$$

$$\tfrac{1}{2}B_{\frac{1}{2}}^{(k)} = \frac{1}{m}\sum \frac{q^k}{\sqrt{(1-aq)(1-bq)}},$$

avec

$$q = a\cos^2\frac{\theta}{2} + b\sin^2\frac{\theta}{2}, \qquad \cos m\theta = 0.$$

16. Calcul des variations séculaires des éléments des orbites.

Astronomische Nachrichten, n° 2433. — Comptes rendus, t. XCVI, p. 1841. Annales de l'Observatoire de Paris, t. XVIII; 45 pages.

Le but de ce travail a été de mettre en lumière un procédé commode et pratique pour le calcul des variations séculaires.

Le fond de la méthode est dû à Gauss (*voir* le Mémoire *Determinatio attractionis*, etc.); mais le grand géomètre avait négligé de donner à ses résultats une forme appropriée au calcul numérique. M. W. Hill, dans un Mémoire inséré au tome I des *Astronomical Papers* de M. Newcomb, sous le titre : *On Gauss's method of computing secular perturbations*, s'est proposé de combler cette lacune. J'ai complété en quelques points le travail de M. W. Hill. Sous la forme qui lui est donnée, avec les Tables numériques qui facilitent dans tous les cas (n° 23) le calcul des intégrales elliptiques, la méthode devient d'une application facile.

Dans le cours du travail, j'ai signalé divers rapprochements analytiques intéressants.

A titre d'exemple, et dans la pensée qu'il suffirait peut-être, pour les petites planètes qui n'offrent pas d'intérêt spécial, de connaître les variations des éléments des orbites proportionnelles au temps, en laissant de côté la construction de Tables proprement dites, j'ai calculé les variations séculaires des éléments d'une petite planète, (103) Héra, par Jupiter, Saturne et Mars.

Plusieurs applications de la méthode de Gauss ont été faites dans ces dernières années; on peut citer les travaux de M. Bauschinger (Munich), Asaph Hall fils (Washington), Innes (Sydney), etc.

17. Sur quelques méthodes pour la détermination des positions des étoiles circompolaires.

Comptes rendus, t. XCVII, p. 561.

Remarques à propos d'une Communication de MM. André et Gonnessiat; démonstration des formules pratiques pour l'emploi des nouvelles méthodes de M. Lœwy; avantages à retirer de l'observation des étoiles circompolaires comprises dans une zone resserrée.

18. Sur une équation différentielle de la théorie des perturbations.

Astronomische Nachrichten, n° 2547.

Mon objet est d'établir pour l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (a_0 + a_1 \cos t + a_2 \cos 2t + \ldots) x = 0, \tag{1}$$

qui s'est présentée à M. W. Hill dans un Mémoire important [*On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the Sun and Moon*, Cambridge (U. S.), 1877] des résultats obtenus par M. Bruns dans le n° 2533 des *Astronomische Nachrichten*, en considérant l'équation

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (a_0 + a_1 \cos t)\, x = 0.$$

Cette équation plus simple joue un rôle essentiel dans les recherches

de M. Gyldén sur la théorie des perturbations, et M. Lindstedt s'en est occupé aussi dans son travail : *Beitrag zur Integration der Differentialgleichungen der Störungstheorie.*

En partant d'un résultat de M. Mittag-Leffler et au moyen d'une analyse fort simple, je parviens aux conclusions suivantes :

Une intégrale particulière de l'équation (1) est de la forme

$$\sum_{+\infty,n}^{+\infty} C_n e^{imt} e^{int},$$

où m est une quantité transcendante donnée par une équation remarquable

$$\cos 2\pi m = f(2\pi),$$

$f(t)$ désignant une série toujours convergente ou fonction entière qui figure dans l'expression de l'intégrale générale

$$x_0 f(t) + x'_0 \varphi(t),$$

et les coefficients C sont des fonctions entières des coefficients a et de m.

19. Sur une formule de M. Tisserand.

Comptes rendus, t. XCVII, p. 1187.

Dans le polynôme $P^{(n)}(p, z)$ défini par l'équation

$$\frac{1}{(1 - 2\theta z + \theta^2)^{\frac{p-1}{2}}} = \sum_0^{\infty} \theta^n P^{(n)}(p, z),$$

on fait

$$z = \mu \cos x + \nu \cos y,$$

μ et ν étant reliés par la relation

$$\mu + \nu = 1.$$

En partant d'un résultat obtenu par M. Appell, je montre que, si l'on pose

$$P^{(n)}(p, z) = 4 \Sigma \mu^i \nu^j A_{i,j} \cos ix \cos jy,$$

le coefficient $A_{i,j}$, considéré comme fonction de ν seulement, vérifie une équation différentielle linéaire du troisième ordre.

Cette équation différentielle admet des intégrales simples dans quelques cas particuliers examinés par M. Tisserand.

20. Sur des développements qui se rapportent à la distance des deux points et sur quelques propriétés des fonctions sphériques.

Comptes rendus, t. XCIX, p. 23.

Dans les admirables recherches sur la figure des planètes que l'on doit à Legendre et à Laplace, les polynômes appelés depuis *polynômes de Legendre* jouent un rôle essentiel. Un résultat fondamental (théorème d'addition) est que, si l'on désigne par Z_n ce que devient $X_n(\cos\theta)$ quand on remplace $\cos\theta$ par

$$\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varpi' - \varpi),$$

on a

$$Z_n = X_n X'_n + \frac{2}{n(n+1)}\frac{dX_n}{dx}\frac{dX'_n}{dx'}\sin\theta\sin\theta'\cos(\varpi' - \varpi)$$
$$+ \frac{1}{(n-1)n(n+1)(n+2)}\frac{d^2X_n}{dx^2}\frac{d^2X'_n}{dx'^2}\sin^2\theta\sin^2\theta'\cos 2(\varpi' - \varpi) + \ldots,$$

où $x = \cos\theta$, $x' = \cos\theta'$.

Renversant en quelque sorte la question, je me suis proposé de construire directement des développements de la forme ci-dessus, ou d'une forme analogue, et susceptibles de représenter une fonction de

$$\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varpi - \varpi').$$

J'obtiens ainsi tout d'un coup le théorème d'addition des fonctions sphériques d'ordre quelconque; on appelle ainsi les polynômes $P^{(n)}(p, z)$ définis par l'équation

$$\frac{1}{(1 - 2\theta z + \theta^2)^{\frac{p-1}{2}}} = \sum_0^{\infty} \theta^n P^{(n)}(p, z);$$

pour $p = 2$, on a les polynômes de Legendre.

21. Influence du roulis sur les observations faites à la mer avec le cercle à niveau de mercure de M. Renouf.

Comptes rendus, t. C, p. 1284.

On a imaginé à plusieurs reprises des instruments pour permettre de retrouver à bord d'un navire la direction de la verticale quand l'horizon de la mer ne peut être observé.

Les conclusions auxquelles je suis arrivé, à l'égard du cercle proposé par M. Renouf, sont les suivantes :

Le navire exécutant, sous l'influence du roulis, des oscillations pendulaires, la *verticale apparente* doit avoir un mouvement oscillatoire de même période; la verticale dévie du côté où le navire penche, et la déviation peut atteindre le dixième de l'angle du roulis.

Ces conclusions sont d'accord avec les résultats et les expériences du commandant Guyou, alors professeur à l'École navale.

Je dois ajouter que le commandant Fleuriais est l'auteur d'un appareil nouveau, très ingénieux, appelé par lui *gyroscope collimateur*, lequel paraît fournir la solution désirée par la Marine.

22. Tables numériques pour faciliter le calcul des éphémérides des petites planètes. (En commun avec M. L. Fabry.)

Comptes rendus, t. CI, p. 598. — Bulletin astronomique, t. II, p. 453-464.

Il y a actuellement plus de 300 petites planètes. Pour les retrouver et les suivre lors de l'opposition, il est nécessaire d'avoir des éphémérides. Les Tables numériques dont il s'agit ont pour objet de faciliter la tâche des astronomes; elles ont été construites en vue des besoins pratiques, et de nombreuses applications en ont été faites.

23. Énergie potentielle de deux ellipsoïdes qui s'attirent.

Comptes rendus, t. CI, p. 1476.

Développement de l'intégrale

$$\int \frac{dm\, dm'}{\Delta},$$

étendue à tous les éléments dm, dm' des deux ellipsoïdes (Δ est la distance de dm, dm') suivant les puissances descendantes de la distance des centres. Cette question offre de l'intérêt pour la Mécanique céleste.

24. Simplifications qui se présentent dans le calcul numérique des perturbations pour certaines valeurs de l'argument. Applications.

Comptes rendus, t. CII, p. 598.

La construction des éphémérides mentionnée au n° 22 ne peut se passer du calcul, au moins approché, des perturbations causées par les planètes principales, telles que Jupiter et Saturne. D'autre part, il serait impossible de faire des Tables pour toutes les petites planètes actuellement connues.

J'ai remarqué qu'on pouvait obtenir au moyen de calculs relativement simples, sinon pour une époque quelconque, du moins pour une ou deux séries d'époques équidistantes, l'effet des perturbations. On est ainsi amené à considérer des perturbations qu'on pourrait appeler *définies*.

Cette remarque est fondée sur les deux résultats suivants :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos n\xi \, d\xi}{\sqrt{1+\alpha^2-2\alpha\cos\xi}} = 4\alpha^n \mathrm{I} \cos n\pi,$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin n\xi \, d\xi}{\sqrt{1+\alpha^2-2\alpha\cos\xi}} = 4\alpha^n \mathrm{I} \sin n\pi;$$

n est un nombre positif quelconque; on a posé

$$\mathrm{I} = \cos n\pi \int_0^1 \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\alpha^2x^2)}} + \sin n\pi \int_1^{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}} \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-\alpha^2x^2)}}.$$

Le fait à noter, au point de vue du calcul numérique, est la substitution de fonctions non périodiques à des fonctions périodiques, sous le signe d'intégration. Cauchy s'en est occupé autrefois [Cf. *Sur la substitution des fonctions non périodiques aux fonctions périodiques dans les intégrales définies* (*Comptes rendus*, t. XVIII)].

Comme applications, j'ai indiqué le calcul des perturbations appro-

chées des petites planètes, ainsi que la recherche des éléments moyens de leurs orbites. L'évaluation des inégalités à longue période pourrait aussi tirer profit des résultats précédents.

J'ai commencé la construction de Tables pour la quantité I, dépendant des deux arguments α et n, pour répondre aux besoins de l'Astronomie.

25. Sur le développement des coordonnées elliptiques.

Bulletin astromique, t. III, p. 528-532.

Laplace a montré, le premier, au moyen d'une analyse très remarquable (*Mécanique céleste,* Supplément au Tome V), que les séries ordonnées suivant les puissances de l'excentricité et les cosinus ou sinus de l'anomalie moyenne, qui représentent le rayon vecteur et l'anomalie vraie, sont convergentes, abstraction faite des signes, en d'autres termes, absolument convergentes, tant que l'excentricité est inférieure à la limite $e = 0,6627\ldots$

Plus tard, la même valeur limite a été déduite de la théorie de la série de Lagrange pour le cas des variables imaginaires (Cauchy, V. Puiseux, Serret, Tchebichef, Rouché).

Il n'était peut-être pas superflu de montrer que la réponse à la question, telle que Laplace l'avait posée, était implicitement renfermée dans les recherches plus récentes qu'on vient de mentionner.

J'ai montré en même temps que le résultat de Laplace pouvait être rattaché d'une manière simple à l'évaluation d'intégrales dans lesquelles figurent, sous le signe d'intégration, des facteurs élevés à une grande puissance (*Théorie analytique des probabilités*).

26. Sur le calcul des intégrales

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\varphi(u)\,du}{\Delta^3(u)},$$

$\varphi(u)$ et Δ^2 étant de la forme $A + B\cos u + C\sin u + D\cos 2u + E\sin 2u$ et Δ^2 essentiellement positif.

Bulletin astronomique, t. IV, p. 192-194.

Les intégrales de cette forme se rencontrent dans le calcul des varia-

tions séculaires des éléments des orbites (*voir* n° 16 ci-dessus); elles se présentent aussi dans plusieurs problèmes d'Astronomie et de Mécanique.

Je fais remarquer que les Tables numériques construites pour le calcul des variations séculaires des éléments des orbites (*Annales de l'Observatoire de Paris*, t. XVIII) pourront servir dans tous les cas.

27. Sur la théorie de la figure des planètes et de la Terre.

Comptes rendus, t. XCIX, p. 1060; t. C, p. 37, 163, 1204; t. CIV, p. 1600; t. CV, p. 1171; t. CVII, p. 55; t. CX, p. 993. — Annales de l'Observatoire, t. XIX, 84 pages. — Bulletin astronomique, t. V, p. 473-481; t. VI, p. 185-192.

L'objet de la théorie est de rechercher les dépendances qui peuvent exister entre les données fournies par les observations, savoir :

1° La masse de la planète;

2° Ses dimensions;

3° Sa vitesse de rotation;

4° Le potentiel de la planète sur un point extérieur (que les observations du pendule ou les mouvements des satellites font connaître);

5° Une quantité dépendant des rapports des moments d'inertie et qui règle la vitesse de précession dans le mouvement de la planète autour de son centre de gravité.

D'après les principes d'Hydrostatique, on doit supposer la planète formée de couches de plus en plus denses à mesure qu'on se rapproche du centre; les molécules s'attirent entre elles suivant la loi de Newton, et l'ensemble obéit à un mouvement uniforme de rotation comme un corps solide.

Cela posé, il existe deux relations, dont l'une est rigoureusement indépendante de la constitution interne, et l'autre n'en dépend presque pas, au moins quand on ne s'éloigne pas beaucoup de l'homogénéité et qu'on tient compte du fait physique d'une diminution rapide de la compressibilité des liquides soumis à des pressions de plus en plus élevées.

Le travail inséré dans les *Annales de l'Observatoire* a été consacré au développement de ces conséquences importantes de la théorie : l'une

d'elles porte le nom de *théorème de Clairaut*, l'illustre auteur de la *Théorie de la figure de la Terre;* l'autre relation, déjà soupçonnée par d'Alembert, a été seulement mise en lumière dans ces derniers temps, grâce aux travaux de M. Roche et de M. Tisserand, puis de MM. Radau, Maurice Lévy, Poincaré.

J'ai pensé utile de pousser les approximations jusqu'au second ordre, afin d'embrasser dans les recherches toutes les planètes, y compris celles qui ont, comme Saturne, un aplatissement très sensible.

La surface libre n'est plus alors une surface ellipsoïdale; celle-ci se creuse légèrement entre le pôle et l'équateur, mais la dépression est très faible. Sans faire intervenir les lois de densité, j'ai réussi à montrer que le maximum de la dépression serait de 9^m pour la Terre, vers la latitude de 45° (*Comptes rendus*, t. CX, p. 993); ce chiffre vient à l'appui des évaluations de M. Helmert dans sa *Géodésique supérieure*, t. II, § 36.

Dans une Note présentée à l'Académie des Sciences le 1er octobre 1888, j'ai montré que l'énergie potentielle de la gravitation d'une planète (en d'autres termes, le travail de l'attraction pour amener les molécules de l'infini dans leurs positions actuelles) peut être calculée aussi à très peu près sans faire intervenir la loi des densités internes.

Les articles insérés au *Bulletin astronomique* résument, sous une forme simple, les principales conséquences de la théorie de Clairaut, en particulier, un des résultats importants établis par M. Poincaré (*Comptes rendus*, 9 juillet 1888; *Bulletin astronomique*, t. VI).

Il est digne de remarque que la théorie indique des limites inférieure et supérieure respectivement de la densité au centre et de la densité superficielle d'une planète, et permette, par exemple, de conclure que les matériaux de la surface de Saturne ne sont très probablement ni solides ni liquides. C'est une indication qui est loin d'être contredite par les observations et qu'on peut rapprocher d'un passage de l'*Exposition du système du Monde*, p. 503, où Laplace voit dans les anneaux des preuves toujours subsistantes de l'extension primitive de l'atmosphère de Saturne.

28. Sur le développement en séris du potentiel des sphéroïdes.

Comptes rendus, t. CIII, p. 33 et 195.
Journal de l'École Polytechnique, LVIIIme cahier, 28 pages.

Cette étude était utile pour les recherches précédentes sur la théorie de la figure des planètes.

Je me suis proposé de vérifier les formules de développement de Legendre et de Laplace (que les illustres auteurs avaient étendues, sans démonstration, à tous les cas) au moyen de la belle méthode appliquée par Dirichlet aux formules de l'attraction des ellipsoïdes (*Journal de Crelle*, t. 32). J'ai considéré spécialement les sphéroïdes de révolution.

29. Prédiction des occultations.

Bulletin astronomique, t. VI, p. 129-141.

Pour faciliter aux voyageurs et aux marins la détermination des longitudes, des perfectionnements importants ont été apportés à la partie de la *Connaissance des Temps* réservée aux occultations.

Il reste à choisir, parmi toutes les occultations inscrites, celles qui seront en effet visibles dans le lieu où l'on se trouve.

Pour prendre un exemple, on peut estimer qu'il y a $\frac{1}{20}$ des occultations de la *Connaissance des Temps* observables à Paris; il faut donc se débarrasser des $\frac{19}{20}$ dont on ne saurait tirer parti.

Ce triage si nécessaire peut être effectué au moyen de constructions graphiques et de diagrammes, en particulier au moyen de la projection stéréographique de la sphère sur le plan de l'horizon du lieu. Le procédé est d'une application facile; je l'ai montré par un exemple.

30. Sur les calculs de Maxwell, relatifs au mouvement d'un anneau rigide autour de Saturne.

Comptes rendus, t. CIX, p. 467. — Bulletin astronomique, t. VI, p. 69-75.

Laplace a remarqué que, si l'anneau avait une régularité parfaite, son équilibre serait essentiellement instable.

Comme le système des anneaux se maintient, il en a conclu que chacun d'eux doit avoir une forme un peu irrégulière; mais il n'a pas cherché à préciser quelles étaient les conditions de stabilité. C'est ce que Maxwell a examiné dans un Mémoire célèbre.

En réfléchissant aux conditions admises au commencement du travail du savant anglais, il m'a semblé toutefois que si Maxwell, supposant à l'origine Saturne placé au centre de l'anneau, arrive à la conclusion que l'anneau est instable à moins d'une irrégularité excessive, il n'est pas du tout démontré par là que de légères irrégularités de l'anneau, combinées avec une petite excentricité, ne puissent assurer la stabilité; il fallait, pour décider, faire un examen spécial de la question.

Le résultat négatif auquel j'ai été conduit relativement à la stabilité complète les conclusions de Maxwell.

L'article des *Comptes rendus* (16 septembre 1889) marque l'origine de ces recherches assez délicates; mais il n'offre que peu de liens avec les résultats définitifs, et il est entaché de plusieurs fautes.

31. Remarques sur le calcul des transcendantes de Bessel.

Bulletin astronomique, t. VII, p. 145. — Bulletin des Sciences mathématiques, t. XIV; mai 1890.

Les transcendantes, rencontrées d'abord par Fourier dans la théorie de la chaleur, étudiées depuis par Bessel en vue des applications astronomiques, jouent un rôle important dans les développements analytiques qui se rapportent à la fonction perturbatrice.

Il peut arriver que, pour apprécier l'importance d'une inégalité d'ordre élevé, on ait à calculer la valeur de la transcendante $J_i(x)$,

$$J_i(x)=\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^i}{1.2\ldots i}\left[1-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1.(i+1)}+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{1.2(i+1)(i+2)}\cdots\right],$$

par de grandes valeurs de x. Dans ce cas, l'usage direct de la série serait incommode. Il peut arriver, en effet, que la valeur de $J_i(x)$ soit insensible, alors que les termes de la série ont des valeurs considé-

rables, les termes affectés de signes différents se détruisant presque complètement. Il faudrait dans un calcul direct apporter une précision extrême au calcul de chaque terme pour pouvoir répondre du résultat final.

En généralisant des résultats obtenus antérieurement par M. Stieltjes, j'ai montré que, suivant qu'on a $\frac{x}{i} < 1$ ou > 1, on peut ou bien utiliser des résultats connus dus à M. Scheibner, ou bien faire usage d'une série semi-convergente jouissant, à partir d'un certain terme, de la propriété de la série de Stirling, savoir que le reste est inférieur en valeur absolue au terme auquel on s'arrête et de signe contraire à ce terme.

32. Sur une représentation géométrique des variations des éléments des orbites.

Bulletin astronomique, t. VII, p. 227.

Le problème des perturbations est par sa nature même un problème d'analyse. Il peut être utile, toutefois, de remplacer les équations par des constructions qui parlent davantage à l'esprit et font saisir l'ensemble du mécanisme des phénomènes.

Ce genre de recherches a été cultivé surtout en Angleterre, à l'exemple de Newton. En Allemagne, Möbius est l'auteur de plusieurs travaux dans cette voie; il a même composé un ouvrage étendu (*Elemente der Mechanik des Himmels auf neum Wege ohne Hülfe höhever Regnungs Arten*, 1843). En France, on peut citer, outre un Mémoire de Lagrange, divers travaux de MM. Lespiault et Resal.

Voici le résultat simple auquel j'ai été conduit en rapprochant les résultats de Möbius des propriétés de l'*hodographe* du géomètre anglais Hamilton :

Si l'on prend le centre de l'hodographe (c'est une circonférence dans le cas du mouvement elliptique), situé sur la perpendiculaire menée par le centre du Soleil au grand axe de l'orbite à une distance $\frac{ke}{\sqrt{p}}$ du Soleil et dans le sens de la vitesse au périhélie, le déplacement du centre de l'hodographe, qui commande celui de l'orbite dans son plan, fera un petit angle avec la composante de la force perturbatrice sur ce

même plan ; il y aura coïncidence si cette composante est dirigée suivant le rayon vecteur ou suivant la direction perpendiculaire.

33. Valeur asymptotique de certains coefficients utilisés dans les quadratures mécaniques.

Bulletin astronomique, t. VII, p. 301.

Dans les formules relatives aux quadratures mécaniques, il figure des coefficients d'une nature très compliquée

$$A_1 = +\frac{1}{24}, \quad A_2 = -\frac{17}{5760}, \quad A_3 = +\frac{367}{967680},$$
$$A_4 = -\frac{27859}{464486400}, \quad A_5 = +\frac{1295803}{122624409600}, \quad \ldots,$$

dans lesquels on n'aperçoit aucune loi. Gauss, l'initiateur des méthodes de quadrature mécanique, les a calculés autrefois (Gauss, *Werke*, t. III, p. 330), et le Dr d'Oppolzer est entré dans de nombreux détails à leur égard (*Traité de la détermination des orbites*, t. II). Ce sont les coefficients du développement

$$\frac{x}{\arcsin x} = 1 - A_1(2x)^2 + A_2(2x)^4 - A_3(2x)^6 + \ldots.$$

Par une voie assez détournée, j'ai réussi à obtenir la valeur asymptotique de A_n, qui est fort simple,

$$A_n = \frac{1}{2^{2n-1}} \frac{1}{\pi^2 n} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

L'erreur relative de l'expression asymptotique n'est que de 0,06 environ lorsqu'on fait $n = 5$ seulement.

34. Études sur la théorie des comètes périodiques.

Comptes rendus, t. CX, p. 625; t. CXI, p. 30.
Annales de l'Observatoire de Paris, t. XX, 64 pages.

Dans le groupe des comètes périodiques associées à Jupiter, qui en comprend une quinzaine au moins, les mouvements sont tous directs comme celui de Jupiter, les orbites sont peu inclinées sur celle de la planète, et l'un des deux points où chacune d'elles perce le plan de

l'orbite de Jupiter est généralement voisin de la trajectoire de cette planète.

On a été conduit à supposer que l'action perturbatrice de Jupiter, agissant sur les comètes qui passent dans son voisinage, pouvait produire un tel état de choses.

Les premiers travaux importants relatifs aux grandes perturbations de Jupiter sur les comètes sont dus à Laplace. Le Verrier leur a donné ensuite une grande extension. Toutefois, on pouvait désirer une étude plus générale du mécanisme de l'action de Jupiter sur les comètes.

Prenant pour point de départ un beau travail de M. Tisserand, publié dans le *Bulletin astronomique*, en 1889, j'ai continué l'étude de ce sujet intéressant. Je me suis surtout attaché à lever les difficultés provenant de la rareté des approches bien accentuées des comètes et de Jupiter, et de l'absence des orbites hyperboliques.

Un prix, dans le concours du Prix Damoiseau, a récompensé ce travail en 1891.

35. Sur la réduction à la forme canonique des équations différentielles pour la variation des arbitraires dans la théorie des mouvements de rotation.

Comptes rendus, t. CXI, p. 593.

M. Serret a donné les équations différentielles rigoureuses pour l'étude des mouvements de rotation (*Mémoires de l'Académie*, t. XXXV); mais, par suite de la transformation faite en vue d'éviter l'introduction des arcs de cercle, les équations n'ont plus la forme canonique. Je suis parvenu à leur conserver cette forme. Une conséquence à signaler est que la méthode suivie par Delaunay pour intégrer, sous forme littérale, les équations du mouvement de la Lune s'applique également aux équations du mouvement de rotation des corps célestes.

36. Sur quelques applications des théories concernant les solutions particulières périodiques du problème dss trois corps et l'intégration des équations différentielles linéaires à coefficients périodiques.

Bulletin astronomique, t. VIII, p. 49-67.

Les recherches récentes dues à MM. Gyldén et Lindstedt, le Mémoire

couronné de M. Poincaré sur le problème des trois corps, ont renouvelé à plusieurs égards la théorie des perturbations. Plusieurs théorèmes ont été établis par M. Poincaré là où une induction plus ou moins vague était le seul guide. Mais on peut retrouver dans Euler et dans Lagrange les germes des méthodes modernes. Il en devait être ainsi quand on se rappelle l'importance extrême que les géomètres attachaient autrefois à la disparition des arcs de cercle des formules des perturbations : les mêmes préoccupations ont dû conduire à des remèdes analogues.

J'ai cherché à rapprocher plusieurs travaux d'Euler et de Lagrange des travaux récents en présentant sous forme d'esquisses très rapides la mise en équation de quelques cas particuliers du problème des trois corps et l'intégration des équations par approximations successives en évitant l'apparition des arcs de cercle.

Au lieu de raisonner sur les équations différentielles mises sous la forme canonique, j'ai voulu, à l'exemple de M. Hill, réduire au minimum le nombre des inconnues.

Cet article constitue la première ébauche d'un travail plus étendu.

37. Sur le calcul des polynômes $X_n(\cos\theta)$ de Legendre pour les grandes valeurs de n.

Bulletin des Sciences mathématiques, t. XV, mai 1891.

M. Darboux a donné une formule qui généralise celle de Laplace et permet d'obtenir une expression approchée de X_n, l'erreur commise étant de l'ordre d'une puissance aussi grande qu'on le voudra de $\frac{1}{n}$ (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1878, p. 39). Depuis, M. Stieltjes est parvenu à un beau résultat, qui consiste en ce que, en prenant les k premiers termes d'une série analogue à celle de M. Darboux, l'erreur commise est inférieure en valeur absolue au *double* du $(k+1)^{\text{ième}}$ terme, dans lequel on aurait remplacé par l'unité le cosinus qui figure au numérateur (*Comptes rendus*, t. CX, p. 1026). L'objet de la présente Note est d'établir pour la série de M. Darboux des conclusions analogues à celles publiées par M. Stieltjes.

38. — Sur la théorie des étoiles filantes.

Comptes rendus, t. CXII, p. 1303.

La théorie astronomique des étoiles filantes, établie par les travaux de H.-A. Newton, Schiaparelli, Le Verrier, etc., regarde les étoiles filantes comme de petites comètes se mouvant par essaims dans l'espace; ces essaims proviendraient de la désagrégation de nuages cosmiques ou de comètes par suite de l'action perturbatrice du Soleil et des grosses planètes.

L'hypothèse de la liaison des étoiles filantes et des comètes est justifiée par le fait que quatre essaims, au moins, parcourent les mêmes orbites que quatre comètes.

Si la liaison des étoiles filantes et des comètes est admise, les recherches sur la théorie de la capture des comètes périodiques peuvent être mises à profit. On peut dire, en effet, qu'il s'agit, comme dans le beau travail de Le Verrier sur la comète de Lexell, de saisir le lien qui existe entre une comète et une famille de petites comètes engendrées par elle, à la suite des perturbations d'une grosse planète susceptibles de désagréger les matériaux cométaires les plus légers, et de faire dériver une infinité d'orbites de l'orbite primitive.

Guidé par ces idées, j'ai établi, en partant du *criterium* de M. Tisserand, la condition nécessaire pour que les divers points radiants qui font successivement sentir leur influence appartiennent à une même famille.

La conclusion est que les points radiants doivent marcher vers l'est au moins quand leur latitude varie peu. Cela paraît conforme à ce que les observations persévérantes de M. Denning ont fait connaître sur les Perséides. Il est à remarquer que, dès 1871, grâce aux observations provoquées par l'*Association scientifique de France,* Le Verrier pouvait indiquer le fait du déplacement du point radiant comme probable (*Comptes rendus,* t. LXXIII, p. 1306).

J'ai développé depuis la théorie dans l'hypothèse de la liaison avec les comètes : j'ai cherché s'il n'y avait pas de caractères distinctifs entre les étoiles filantes produites par les planètes, soit intérieures,

soit extérieures; par des planètes extérieures de plus en plus éloignées, etc.

Après réflexion, il m'a paru, et telle est aussi l'opinion de M. Schiaparelli (voir *Mondes*, t. XIII, p. 287), qu'il serait au moins prématuré d'affirmer la liaison constante des essaims avec les comètes; aussi n'ai-je pas cru utile de publier les recherches mentionnées en dernier lieu.

39. Sur un cas particulier du problème des trois corps.

Bulletin astronomique, t. IX, p. 113-118.

Remarques à l'occasion d'un problème traité par M. de Haerdtl.

40. Sur le calcul des inégalités d'ordre élevé.

Comptes rendus, t. CXV, p. 386.

Je me suis proposé de compléter en quelques points le beau Mémoire de M. V. Puiseux (*Annales de l'Observatoire de Paris*, t. VII), consacré à l'exposition des méthodes que Cauchy imagina, en 1845, comme rapporteur du travail de Le Verrier sur la grande inégalité de Pallas.

Un exemple particulier sert d'abord à montrer l'inconvénient du développement ordinaire suivant les puissances croissantes des petites quantités : le coefficient d'un terme éloigné peut être notablement en erreur si l'on se contente de la partie de degré le plus bas.

La série de Legendre, employée par Cauchy pour exprimer les coefficients $b_s^{(n)}$ de Laplace, n'est pas toujours convergente; c'est ce qui arrive, par exemple, pour le couple de planètes Vénus et la Terre. J'ai réussi à établir que la série de Legendre jouit des propriétés de la série semi-convergente de Stirling et qu'elle est avantageuse pour le calcul numérique.

La même série de Legendre et les séries analogues qu'on en déduit pour exprimer $\alpha \frac{db_s^{(n)}}{d\alpha}$, $\alpha^2 \frac{d^2 b_s^{(n)}}{d\alpha^2}$, $\cdots$ permettent de réaliser simplement les réductions si gênantes dans le calcul des inégalités lunaires à longue période, et évitent les différences de grands nombres se détruisant les uns les autres.

TRAVAUX D'OBSERVATION.

Sorti de l'École Polytechnique en 1874, j'ai pris part, depuis 1875, aux travaux réguliers de l'Observatoire, en qualité d'aide-astronome, puis d'astronome adjoint (1881).

J'ai pris une part importante à la réobservation des étoiles du grand Catalogue de Lalande, travail auquel les efforts de l'Observatoire de Paris ont été consacrés presque exclusivement pendant plus de trente ans.

Le nombre des observations méridiennes que j'ai effectuées depuis mon entrée à l'Observatoire jusqu'au 1er janvier 1892 dépasse 30000 (30121).

J'ai été successivement chargé de plusieurs services, en particulier de l'observation des petites planètes au grand Cercle méridien, établi, en 1863, par Le Verrier principalement pour cet objet. L'observation de ces petits astres, à cause des précautions spéciales qu'elle demande, a toujours été considérée comme un honneur pour l'astronome chargé de ce service.

630 observations de petites planètes, ainsi que de 4 comètes, sont insérées dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* de 1881 à 1891.

En 1882, j'ai fait partie de l'une des missions chargées d'aller observer le passage de Vénus sur le Soleil, celle d'Haïti (septembre 1882-février 1883). La mission d'Haïti a été favorisée par le beau temps. Les particularités des phénomènes physiques, dans le voisinage des contacts, se trouvent notées en détail dans mon Rapport (*Comptes rendus*, t. XCVII, p. 360). Bien que, à chaque occasion, lors des phénomènes annoncés comme observables à Paris, je me sois préparé avec soin, j'ai réussi seulement, par suite des conditions défavorables, à observer quelques occultations d'étoiles faibles, d'après le programme tracé par M. Döllen, de Poulkova, pendant l'éclipse totale de Lune du 28 janvier 1888. Ces observations ont été publiées, en 1889, par M. Otto Struve (*Sammlung der Beobachtungen von Sternbedeckungen*).

18850 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.